Introdução aos Processos Estocásticos

Luiz Renato Fontes

Distribuições invariantes/estacionariedade/convergência

Seja $(X_n) \sim \mathrm{CM}(\cdot, \mathbf{P})$ em $\mathcal{S}$. Uma medida μ em $\mathcal{S}$ * será dita *invariante* (ou *de equilíbrio*, ou *estacionária*) para (X_n) (ou $\mathbf{P}$) se

$$\mu\mathbf{P} = \mu \quad (\text{ie, } \mu_y = \textstyle\sum_{x\in\mathcal{S}} \mu_x P_{xy},\ y \in \mathcal{S}). \tag{0}$$

Se μ for uma probabilidade, diremos que μ é uma *distribuição invariante* (ou *de equilíbrio* ou etc).

Obs. 1) μ medida invariante $\Rightarrow \mu\mathbf{P}^n = \mu,\ n \geq 0.$ (1)

2) Se μ distribuição invariante e $X_0 \sim \mu$, então $X_n \sim \mu,\ n \geq 1$.

Def. Diremos que um processo estocástico $(X_n)_{n\geq 0}$ é *estacionário* se $(X_{n+\ell})_{n\geq 0} \sim (X_n)_{n\geq 0}$ para todo $\ell \geq 0$.

---

*isto é, $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty)$, que também veremos como um vetor $(\mu_x)_{x\in\mathcal{S}}$ com entradas ≥ 0

Teorema 1

Se μ distribuição invariante para uma Cadeia de Markov (X_n) e $X_0 \sim \mu$, então (X_n) é estacionária.

Dem. Basta mostrar que para $n, \ell \geq 1$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{S}$ arbitrários

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) \\ = &\mathbb{P}(X_\ell = x_0, X_{1+\ell} = x_1, \ldots, X_{n+\ell} = x_n). \end{aligned} \tag{2}$$

O lado direito de (2) vale

$$\mathbb{P}(X_\ell = x_0) P_{x_0 x_1} \cdots P_{x_{n-1} x_n} \stackrel{\text{inv}}{=} \mu_{x_0} P_{x_0 x_1} \cdots P_{x_{n-1} x_n},$$

que é o lado esquerdo de (2). $\square$

Teorema 2

Suponha que $\mathcal{S}$ seja finito e que para algum $x \in \mathcal{S}$ haja um vetor π em $\mathcal{S}$ tal que

$$P_{xy}^{(n)} \to \pi_y \text{ quando } n \to \infty \ \forall y \in \mathcal{S}.$$

Então, π é uma distribuição invariante.

Dem. $\pi_y = \lim_{n\to\infty} P_{xy}^{(n)} \overset{\text{CK}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{z\in\mathcal{S}} P_{xz}^{(n-1)} P_{zy}$

$$\overset{|\mathcal{S}|<\infty}{=} \sum_{z\in\mathcal{S}} \lim_{n\to\infty} P_{xz}^{(n-1)} P_{zy} = \sum_{z\in\mathcal{S}} \pi_z P_{zy},$$

e como $\pi_y \geq 0 \ \forall y$, π é uma medida invariante. Agora,

$$\sum_{y\in\mathcal{S}} \pi_y = \sum_{y\in\mathcal{S}} \lim_{n\to\infty} P_{xy}^{(n)} \overset{|\mathcal{S}|<\infty}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{y\in\mathcal{S}} P_{xy}^{(n)} = 1,$$

e π é uma probabilidade. $\square$

Obs.

No passeio aleatório discutido no Álbum 6, pode-se verificar que

$$P_{xy}^{(n)} \to 0 \text{ quando } n \to \infty \ \forall x, y \in \mathbb{Z}^d. \ ^{\dagger} \tag{3}$$

Exemplos

1) $$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

Descontados casos triviais ($\alpha + \beta = 0$ ou 2), temos (do que vimos antes): quando $n \to \infty$

$$\mathbf{P}^n \to \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \end{pmatrix}$$

e logo $\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}, \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)$ é distribuição invariante para $\mathbf{P}$.

[†] $\pi \equiv 0$ não deixa de ser uma medida invariante, mas não é uma probabilidade

Exemplos (cont)

2) $$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Podemos voltar ao que fizemos antes e (tentar) calcular o limite de $\mathbf{P}^n$ para obter uma distribuição invariante. Em vez disto, notemos que a condição (0) para que π seja invariante produz um sistema linear de equações para μ. Vamos montá-lo e tentar resolvê-lo nesse caso; π deve satisfazer:

$$\pi_1 = \tfrac{\pi_3}{2}; \quad \pi_2 = \pi_1 + \tfrac{\pi_2}{2}; \quad \pi_3 = \tfrac{\pi_2}{2} + \tfrac{\pi_3}{2} \Rightarrow \pi = \pi_1(1,2,2)$$

Como queremos que π seja uma distribuição de probabilidade,

$$\pi_1 = \tfrac{1}{5}, \text{ e } \pi = \left(\tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{2}{5}\right).$$

Note que só temos uma distribuição invariante nesse caso, e, logo, se o cálculo do limite sugerido acima vingar (de fato, vinga; verifique), então deve produzir π como acima.

Exs (cont.)/Recorrência positiva/nula

3) Passeio aleatório simples simétrico em $\mathbb{Z}$

Nesse caso, $\mu\mathbf{P} = \mu$ é equivalente a

$$\mu_x = \tfrac{1}{2}\mu_{x-1} + \tfrac{1}{2}\mu_{x+1},\ x \in \mathbb{Z}.$$

Logo $\mu_x = \text{const}$ é solução para toda const, o que de toda forma não nos fornece uma distribuição invariante (já que não há distribuição de probabilidade uniforme em $\mathbb{Z}$).

De fato, segue de (3) (e da teoria a ser desenvolvida a seguir) que, nesse caso (irredutível e recorrente), não há distribuição invariante, o que nos leva ao seguinte conceito, central para a existência de distribuições invariantes em cadeias irredutíveis.

Recorrência positiva/nula

Se $x \in \mathcal{S}$ for tal que $m_x := \mathbb{E}_x(T_x) < \infty$, então dizemos que x é *recorrente positivo*. Se x for recorrente, mas não recorrente positivo, então será dito *recorrente nulo*.

Teorema 3

Seja $\mathbf{P}$ irredutível. Então são equivalentes as seguintes afirmações.

(i) Todos os estados são recorrentes positivos;

(ii) Existe um estado recorrente positivo;

(iii) $\mathbf{P}$ admite uma distribuição invariante.

Além disto, sob (iii), sendo π a distribuição invariante, temos:

$$\pi_x = \frac{1}{m_x}, \, x \in \mathcal{S}.$$

Obs. 1) $\mathbf{P}$ irredutível e recorrente positiva $\Rightarrow \pi$ é única. Nesse caso $\mu = \pi$ é a única solução probabilística de $\mu\mathbf{P} = \mu$ [‡]; adicionalmente, $\pi_x > 0$ para todo $x \in \mathcal{S}$;

2) Recorrência positiva é propriedade de classe (pois cadeia restrita a classe recorrente é irredutível); (segue que) o mesmo vale para recorrência nula;

[‡]isto é, $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty)$ satisfaz: a) $\mu\mathbf{P} = \mu$ e b) $\sum_{x \in \mathcal{S}} \mu_x = 1$

Obs. (cont.)

3) Pode-se mostrar que, se **P** for irredutível, então

a) **P** recorrente positiva $\Leftrightarrow \exists!$ distribuição invariante;

b) **P** recorrente $\Rightarrow \exists!$ medida invariante, a menos de constante multiplicativa;

c) **P** recorrente nula $\Rightarrow \nexists$ distribuição invariante;

d) **P** recorrente nula $\Leftarrow \exists$ medida invariante infinita $+$ **P** recorrente

4) Se $\mathcal{S}$ for finito e **P** for irredutível, então **P** é recorrente[§]; podemos mostrar que nesse caso **P** é recorrente positiva.

[§] Segue do Teorema 4 do Álbum 6.

Exemplos

1) Passeio aleatório simples e simétrico em $\mathbb{Z}$ (irredutível, recorrente)

Seja $\mu_x \equiv 1$. Então $\mu_x = \frac{1}{2}\mu_{x-1} + \frac{1}{2}\mu_{x+1}$, $x \in \mathbb{Z}$, e logo μ é invariante. Sendo μ infinita, a Obs. 3d acima diz que a cadeia é recorrente nula.¶

2) O argumento acima funciona igualmente em $\mathbb{Z}^2$; $\mu \equiv 1$ é invariante também para o PASS em $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$, mas nesse caso, a cadeia não é recorrente‖.

3) PAS assimétrico em $\mathbb{Z}$: $P_{x\,x-1} = q < p = P_{x\,x+1}$, $p + q = 1$.

$$\mu = \mathbf{P}\mu \Leftrightarrow \mu_x = \mu_{x-1}p + \mu_{x+1}q,\ x \in \mathbb{Z} \tag{4}$$

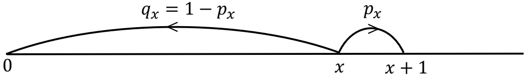
A equação de diferenças (4) tem a seguinte sol geral: $\mu_x = A + B\left(\frac{p}{q}\right)^x$; logo, temos uma família a 2 parâmetros, A, $B \geq 0$, de medidas invariantes: não há unicidade a menos de const multiplicativa (cadeia transitória); não há distribuição invariante.

¶A mesma conclusão segue da análise feita no Álbum 3 (vide Slide 10); note que, por simetria, $\mathbb{E}_0(T_0) = \mathbb{E}_1(H_0)$.

‖Esse caso é contra-ex para recíproca da Obs 3b: Teo de Liouville discreto.

Ex. 4) Castelo de cartas

$\mathcal{S} = \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2 \ldots\}$; $P_{x\,x+1} = p_x \in (0,1)$, $x \geq 0$.



$$\mu \mathbf{P} = \mu \Leftrightarrow \mu_0 = \sum_{x=0}^{\infty} \mu_x q_x, \quad \mu_x = \mu_{x-1} p_{x-1},\ x \geq 1.$$

Iterando: $\mu_x = \mu_0 \big(\prod_{y=0}^{x-1} p_y \big) =: \mu_0 \, \mathcal{P}_{x-1}$. Logo, $\bar{\mu} = (1, \mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \ldots)$,

e múltiplos positivos são medidas invariantes.

Se $\mathcal{M} := \sum_{x \geq 0} \mathcal{P}_x < \infty$, então $\pi = \frac{\bar{\mu}}{1+\mathcal{M}}$ é a distribuição invariante.

Nesse caso, como $\mathbf{P}$ é irredutível, temos que $\mathbf{P}$ é recorrente positiva.

Exercício: Mostre que $\mathbf{P}$ é a) transitória $\Leftrightarrow \lim_{x \to \infty} \mathcal{P}_x = \prod_{y=0}^{\infty} p_x > 0$;

b) recorrente nula $\Leftrightarrow \prod_{y=1}^{\infty} p_x = 0$ e $\sum_{x \geq 0} \mathcal{P}_x = \infty$.

(i) Se $p_x \equiv p$, então $\mathcal{P}_x = p^{x+1}$, $x \geq 0$, e logo $1 + \mathcal{M} = \sum_{x \geq 0} p^x = \frac{1}{q}$, onde $q = 1 - p$. Segue que $\pi_x = p^x q$, $x \geq 0$, é a distribuição invariante nesse caso.

Ex. 4 (cont)

(ii) Suponha que $p_x \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 1$; então, $\mathcal{P}_x = \prod_{y=0}^{x} p_y = e^{\sum_{y=0}^{x}\log(1-q_y)}$, e verificamos prontamente que

$$e^{-\sum_{y=0}^{x}\frac{q_y}{1-q_y}} \le \mathcal{P}_x \le e^{-\sum_{y=0}^{x} q_y}. \tag{5}$$

(ii.a) Suponha que exista $x_0 \ge 1$ tal que $q_x = \frac{c}{x}$, $x \ge x_0$, onde $c > 0$ é uma constante. Segue de (5) que

$$\sum_{y=0}^{x}\frac{q_y}{1-q_y}, \sum_{y=0}^{x} q_y \sim c\sum_{y=1}^{x}\frac{1}{y} \sim c\log x, \text{ e, logo, } \mathcal{P}_x \sim \text{const }\frac{1}{x^c}. \tag{6}$$

Se $c > 1$, então $\mathcal{M} \sim \text{const}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x^c} < \infty$, e **P** é recorrente positiva.

Se $0 < c \le 1$, então $\mathcal{M} \sim \text{const}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x^c} = \infty$, e, como $\lim_{x\to\infty}\mathcal{P}_x = 0$, segue do exercício acima que **P** é recorrente nula.

(ii.b) Se existir $x_0 \ge 1$ tq $q_x = \frac{1}{x^c}$, $x \ge x_0$, onde $c > 1$ é uma constante, então $\sum_{y=0}^{\infty}\frac{q_y}{1-q_y} < \infty$, e segue de (5) que $\lim_{x\to\infty}\mathcal{P}_x > 0$. Logo, pelo exercício acima, temos que **P** é transitória nesse caso.**

**Pode-se checar ainda que não há medidas invariantes nesse caso, a não ser a trivial $\mu \equiv 0$.

Convergência ao equilíbrio

Def. $x \in \mathcal{S}$ é dito *aperiódico* se $\exists\, n_0 \geq 1$ tq $P_{xx}^{(n)} > 0 \;\forall\; n \geq n_0$.

Obs. Pode-se verificar que x é aperiódico se e só se o *máximo divisor comum* de $\{n \geq 1 : P_{xx}^{(n)} > 0\}$ for 1.

Lema 1. Se $\mathbf{P}$ for irredutível e admitir um estado aperiódico, então para todo $x, y \in \mathcal{S}$, temos que $P_{xy}^{(n)} > 0 \;\forall\; n$ bastante grande. Em particular, todo estado é aperiódico.

Dem. Sejam $z \in \mathcal{S}$ aperiódico e $x, y \in \mathcal{S}$. Da irredutibilidade: $\exists\, r, s$: $P_{xz}^{(r)}, P_{zy}^{(s)} > 0$. Dado n_0 tq $P_{zz}^{(n)} > 0 \;\forall\; n \geq n_0$, se $n \geq n_0' := n_0 + r + s$:

$$P_{xy}^{(n)} \geq P_{xz}^{(r)} P_{zz}^{(n-r-s)} P_{zy}^{(s)} > 0, \text{ já que } n - r - s \geq n_0. \qquad \square$$

Obs. Aperiodicidade é propriedade de classe.

Teorema 4 (Convergência ao equilíbrio)

Suponha que $\mathbf{P}$ seja irredutível, aperiódica, e que tenha distribuição invariante π. Dada uma distribuição inicial μ qualquer, temos

$$\mathbb{P}(X_n = y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi_y, \; \forall y \in \mathcal{S}. \tag{7}$$

Alternativamente,

$$\mathbb{P}_x(X_n = y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi_y, \; \forall x, y \in \mathcal{S}. \tag{8}$$

Obs. 1) O limite não depende de μ ou x (perda de memória).

2) Do Teorema 3: podemos substituir a frase "que tenha distribuição invariante π" por "recorrente positiva"; nesse caso, incluímos depois de (7): "onde π é a distribuição invariante estipulada pelo Teorema 3".

3) Cadeias irredutíveis e recorrentes positivas são ditas *ergódicas*. Cadeias irredutíveis finitas são ergódicas (vide Obs 4 no slide 9).

Dem. do Teorema 4

Vamos tratar apenas do caso em que $\mathcal{S}$ é finito.

1º caso: $P_{xy} > 0$ para todo $x, y \in \mathcal{S}$

Vamos mostrar que para todo $x, y \in \mathcal{S}$, $P_{xy}^{(n)} = P_{xy}^n$ converge para um limite que não depende de x qdo $n \to \infty$. Pelos Teos 2 e 3 acima, esse limite, vamos denotá-lo por π_y, fornece então a única distr inv de $\mathbf{P}$.

Vamos fixar $y \in \mathcal{S}$, e sejam $M_n = M_n(y) = \max_{x\in\mathcal{S}} P_{xy}^n =: P_{z_n y}^n$,

$$m_n = m_n(y) = \min_{x\in\mathcal{S}} P_{xy}^n =: P_{w_n y}^n \text{ e } \Delta_n = \Delta_n(y) = M_n - m_n.$$

Basta mostrar que

$$\text{a) } (M_n) \text{ é uma sequência numérica decrescente}^{\dagger\dagger}; \tag{9}$$

$$\text{b) } \Delta_n \to 0 \text{ quando } n \to \infty, \tag{10}$$

pois, fazendo $\pi_y = \lim_{n\to\infty} M_n(y)$, então

$$|P_{xy}^n - \pi_y| \le |P_{xy}^n - M_n(y)| + |M_n(y) - \pi_y| = |P_{xy}^n - P_{z_n y}^n| + |M_n(y) - \pi_y|$$
$$\le \Delta_n(y) + |M_n(y) - \pi_y| \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

---

††e logo, como a seq é obvia/e ≥ 0, ela converge

1^o caso (cont.)

a) Para $v \in \mathcal{S}$ e $n \geq 1$, segue de $\mathbf{P}^{n+1} = \mathbf{P}\mathbf{P}^n$ que

$$P^{n+1}_{vy} = \sum_{x \in \mathcal{S}} P_{vx} P^n_{xy} \leq \sum_{x \in \mathcal{S}} P_{vx} P^n_{z_n y} = M_n \text{ e, logo, } M_{n+1} \leq M_n. \quad \Box_{\mathrm{a}}$$

b) Seja $\delta = \min_{u,v \in \mathcal{S}} P_{uv}$. Note que $0 < \delta \leq 1/2$. Temos também que

$$M_n - M_{n+1} = P^n_{z_n y} - \sum_{u \in \mathcal{S}} P_{z_{n+1} u} P^n_{uy}$$

$$= \sum_{u \in \mathcal{S}} P_{z_{n+1} u} (P^n_{z_n y} - P^n_{uy}) \geq P_{z_{n+1} w_n} (P^n_{z_n y} - P^n_{w_n y}) \geq \delta \Delta_n. \tag{11}$$

Similarmente, $\quad m_{n+1} - m_n \geq \delta \Delta_n, \; n \geq 1. \qquad (12)$

Obs. (12) nos diz em particular que $m_n \nearrow$ em n. Logo $\forall\ n \geq 1$

$$M_n \geq m_n \geq m_1 \geq \delta \Rightarrow \pi_y = \lim_{n \to \infty} M_n(y) \geq \delta > 0, \; y \in \mathcal{S}. \tag{13}$$

Continuando, temos que

$$\Delta_{n+1} = M_{n+1} - m_{n+1} = (M_n - m_n) - (M_n - M_{n+1}) - (m_{n+1} - m_n)$$

$$\overset{(11,12)}{\leq} \Delta_n - 2\delta\Delta_n = (1 - 2\delta)\Delta_n \overset{1-2\delta =: \xi}{\leq} \xi^2 \Delta_{n-1} \leq \cdots \leq \xi^n \Delta_1 \leq \xi^n.$$

Note que $0 \leq \xi < 1$. (10) segue. $\Box_{\mathrm{b}}$

2^o caso

Em todo caso, podemos supor que existe K tal que $P_{xy}^K > 0$ para todo $x, y \in \mathcal{S}$ [‡‡]. Segue do 1^o caso que

$$P_{xy}^{Kn} \to \pi_y \text{ quando } n \to \infty \text{ para todo } y \in \mathcal{S}, \text{ isto é,}$$

$$\mathbf{P}^{Kn} \to \mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} \pi \\ \vdots \\ \pi \end{pmatrix} \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Logo, para $\ell \geq 1$ fixo, segue que

$$\mathbf{P}^{Kn+\ell} = \mathbf{P}^{\ell}\mathbf{P}^{Kn} \to \mathbf{P}^{\ell}\mathbf{\Pi} \overset{*}{=} \mathbf{\Pi} \quad \text{quando } n \to \infty,$$

onde $\overset{*}{=}$ segue de $\mathbf{P}^{\ell}$ ser uma matriz estocástica e $\mathbf{\Pi}$ ter as entradas das colunas constantes. Concluímos que

$$\mathbf{P}^{n} \to \mathbf{\Pi} \text{ quando } n \to \infty. \qquad \square$$

[‡‡] pela aperiodicidade de **P** e finitude de $\mathcal{S}$, usando o Lema 1

Obs

1) Segue do argumento acima que no caso irredutível aperiódico finito a convergência $\mathbf{P}^n \to \mathbf{\Pi}$ é exponencialmente rápida:

$$\max_{x,y\in\mathcal{S}} |\mathbb{P}_x(X_n = y) - \pi_x| \leq \text{const } \zeta^n,\ n \geq 1,$$

para algum $0 < \zeta < 1$.

2) Nesse mesmo caso, pode-se usar a decomposição de $\mathbf{P}$ na forma canônica de Jordan, como indicado no Álbum 4. Podemos então mostrar que há apenas um autovalor com módulo 1, que vamos denotar por λ_1 (de fato, $\lambda_1 = 1$, como já indicamos antes) e que dentre os demais autovalores $\lambda_2, \dots, \lambda_m$ (onde $m = |\mathcal{S}|$), temos que $\eta = \max|\lambda_i| < 1$. Segue que

$$\max_{x,y\in\mathcal{S}} |\mathbb{P}_x(X_n = y) - \pi_x| \leq \text{const } n^k\eta^n,\ n \geq 1,$$

onde $0 \leq k \leq m-1$ é o tamanho do bloco de Jordan correspondente a η (o maior tamanho, se houver mais que um tal bloco).

Obs (cont.)

3) Segue ainda da demonstração acima*, e do Teo 2, que, quando $\mathcal{S}$ for finito, o Teo 4 pode ser enunciado, alternativamente, da seguinte forma.

Teorema 4′

Sejam $\mathcal{S}$ seja finito e $\mathbf{P}$ irredutível e aperiódica. Então, para $x, y \in \mathcal{S}$,

i) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_x(X_n = y)$ existe e *não depende* de x;

ii) Fazendo $\pi_y = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_x(X_n = y)$, $y \in \mathcal{S}$, temos que $\pi = (\pi_x)_{x\in\mathcal{S}}$ é a *única* distribuição invariante para $\mathbf{P}$; além disso, $\pi_y > 0 \ \forall \ y \in \mathcal{S}$.

A unicidade de π segue de (1) e da demonstração acima: seja μ uma distribuição invariante para $\mathbf{P}$; então, para todo n

$$\mu = \mu\mathbf{P}^n; \text{ logo, } \mu = \lim_{n\to\infty} \mu\mathbf{P}^n = \mu \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \mu\mathbf{\Pi} = \pi;$$

a positividade de π_y para todo y foi estabelecida em (13).

Em particular, segue que $\mu\mathbf{P} = \mu$, visto como um sistema de eqs lineares com incógnitas $(\mu_x,\ x \in \mathcal{S})$, tem em $\mu = \pi$ a única solução probabilística.

---

*que, note-se, vale apenas para $\mathcal{S}$ finito, enquanto o Teo 4 vale tb para $\mathcal{S}$ infinito (sob as conds de seu enunciado, é claro)

Convergência ao equilíbrio — Caso irredutível geral

Para enunciar o caso irredutível geral (não necessariamente aperiódico e recorrente positivo), começamos com um resultado preliminar.

Teorema 5 Seja $\mathbf{P}$ irredutível. Então $\exists$ um inteiro $d \geq 1$ (finito) e uma partição $\mathcal{S} = \mathcal{C}_0 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_{d-1}$ tal que, fazendo $\mathcal{C}_{nd+r} = \mathcal{C}_r$, $0 \leq r < d$,

(i) $P_{xy}^{(n)} > 0$ só se $y \in \mathcal{C}_{r+n}$, onde r é tal que $x \in \mathcal{C}_r$;

(ii) Dados r e $x \in \mathcal{C}_0, y \in \mathcal{C}_r$, temos que $P_{xy}^{(nd+r)} > 0 \; \forall \; n$ grande.

Obs. 0) $\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_{d-1}$ são disjuntos.

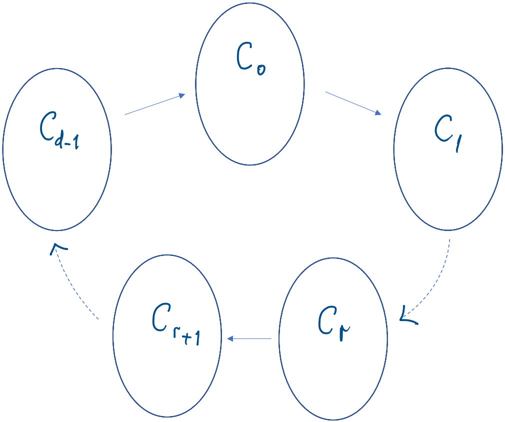
1) d é dito o *período* da CM/de $\mathbf{P}$; o caso aperiódico corresponde a $d = 1$.

2) Pode-se mostrar que $d = \text{mdc}\,\{n \geq 1 : \; P_{xx}^{(n)} > 0\}$, indep de $x \in \mathcal{S}$.

3) A partição é única a menos de qual componente recebe o rótulo "0", no caso em que $d > 1$, o que é arbitrário entre os d componentes.

4) Esse teorema diz que, para $0 \leq r < d$, se μ se concentrar em $\mathcal{C}_r$, então $(Y_n)_{n \geq 0} = (X_{dn})_{n \geq 0}$ é uma CM$(\mu, \mathbf{P}^d)$ em $\mathcal{C}_r$, irredutível e aperiódica, e, logo, a ela se pode aplicar o Teorema 4, se for recorrente positiva. Enunciaremos um resultado mais geral no Teorema 6 abaixo.

Ilustração para o Teorema 5



As transições em 1 passo de dado estado de $\mathcal{C}_r$, para dado $r = 0, 1, \ldots, d-1$, se dá necessariamente para um estado de $\mathcal{C}_{r+1}$ (não necessariamente sempre o mesmo).

Obs.(cont.)/Exemplos

4′) Na situação acima, podemos escrever

$$
\mathbf{P}^d = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \mathcal{C}_0 & \mathcal{C}_1 & \cdots & \mathcal{C}_{d-1} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathcal{C}_0 \\ \mathcal{C}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{C}_{d-1} \end{array} & \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{P}_{d-1} \end{pmatrix} \end{array}, \tag{14}
$$

onde $\mathbf{P}_r$ é irredutível e aperiódica, $0 \leq r < d$.

Exemplos

1) O Passeio Aleatório Simples em $\mathbb{Z}$, com $p \in (0, 1)$, é irredutível e tem período $d = 2$ com $\mathcal{C}_0 = \{\text{inteiros pares}\}$ e $\mathcal{C}_1 = \{\text{inteiros ímpares}\}$ (ou vice-versa).

2) Cadeias com 4 e 3 estados e matrizes de trans dadas, resp, por

$$
\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.
$$

Temos $d = 2$ em ambos os casos.

Teorema 6 (Teo geral de convergência para cadeias irredutíveis)

Suponha que $\mathbf{P}$ seja irredutível e tenha período d, e seja $\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_{d-1}$ a partição estabelecida no Teo 5. Seja μ uma prob em $\mathcal{S}$ concentrada em $\mathcal{C}_0$, e $(X_n) \sim \mathrm{CM}(\mu, \mathbf{P})$. Então, p/$r = 0, \ldots, d-1$ e $y \in \mathcal{C}_r$, temos que

$$\mathbb{P}(X_{nd+r} = y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tfrac{d}{m_y}, \tag{15}$$

onde $m_y = \mathbb{E}_y(T_y)$ †; em particular, se $x \in \mathcal{C}_0$,

$$P_{xy}^{(nd+r)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tfrac{d}{m_y}. \tag{16}$$

Obs. 1) Os casos transitório e recorrente nulo estão incluídos; em ambos o limite se anula identicamente.

2) Usando a notação de $4'$) acima, temos que, no caso recorrente positivo do Teo 6, $\frac{d}{m_y} = \pi_y^r = d\pi_y$, onde $(\pi_z^r,\, z \in \mathcal{C}_r)$ é a linha constante de $\mathbf{\Pi}_r = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_r^n$ e $(\pi_w,\, w \in \mathcal{S})$ é a distr inv para $\mathbf{P}$ dada no Teo 3.

(Mas isto vale também nos casos recorrente nulo e transitório, com $\mathbf{\Pi}_r \equiv \mathbf{0}$ e $\pi_y \equiv 0$.)

† $\frac{d}{\infty} = 0$

Obs 3

Ainda no caso recorrente positivo, seja

$$\mathbf{\Pi} = \begin{array}{c} \\ \mathcal{C}_0 \\ \mathcal{C}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{C}_{d-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathcal{C}_0 & \mathcal{C}_1 & \cdots & \mathcal{C}_{d-1} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{\Pi}_0 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Pi}_1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{\Pi}_{d-1} \end{pmatrix} \end{array}. \qquad (17)$$

Da Obs 2, segue então que

$$\mathbf{\Pi}\mathbf{P} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^{nd}\mathbf{P} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^{nd+1} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\mathbf{P}^{nd} = \mathbf{P} \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^{nd} = \mathbf{P}\mathbf{\Pi} \qquad (18)$$

Do Teo 5.i, temos que

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ \mathcal{C}_0 \\ \mathcal{C}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{C}_{d-2} \\ \mathcal{C}_{d-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathcal{C}_0 & \mathcal{C}_1 & \mathcal{C}_2 & \cdots & \mathcal{C}_{d-1} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{R}_0 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{R}_{d-2} \\ \mathbf{R}_{d-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{array}, \qquad (19)$$

onde $\mathbf{R}_r$ é uma matriz estocástica $\mathcal{C}_r \times \mathcal{C}_{r+1}$, $0 \le r < d$ ‡.

‡Lembre que $\mathcal{C}_d = \mathcal{C}_0$. Qdo $d = 1$, $\mathbf{P} = \mathbf{R}_0$.

Obs 3 (cont.)

Para $0 \leq r < d$, façamos $\tilde{\pi}^r_x = \begin{cases} \pi^r_x, & \text{se } x \in \mathcal{C}_r; \\ 0, & \text{se } x \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{C}_r; \end{cases}$ e

$\tilde{\pi}^r = (\tilde{\pi}^r_x, x \in \mathcal{S})$. De (18), usando (17) e (19), segue que

$$\tilde{\pi}^r \mathbf{P} = \tilde{\pi}^{r+1}, \ 0 \leq r < d, \tag{20}$$

onde $\tilde{\pi}^d = \tilde{\pi}^0$. Fazendo, finalmente, $\pi = \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} \tilde{\pi}^r$, temos

$$\pi \mathbf{P} = \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} \tilde{\pi}^r \mathbf{P} = \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} \tilde{\pi}^{r+1} = \pi, \tag{21}$$

e logo π é uma distribuição invariante para **P** (note que π é uma probabilidade).

De fato, pelo argumento utilizado acima, logo abaixo do enunciado do Teorema $4'$, temos que π é única.

De novo, como no caso observado no Slide 19, aqui também, se $\mathcal{S}$ for finito, então o sistema de equações lineares $\mu \mathbf{P} = \mu$ em μ tem em $\mu = \pi$ a única solução probabilística.

Obs final

Nesse álbum, enunciamos sem provar (no caso geral, em que $\mathcal{S}$ pode ser infinito) os Teoremas 3, 4, 5 e 6.

Dos argumentos que apresentamos para o caso em que $\mathcal{S}$ é finito, segue maior parte dos Teoremas 3, 4 e 6 nesse caso.

Pontos que não foram abordados no caso finito são a equivalência afirmada no Teorema 3, e a forma específica de π ali estabelecida.

Ambos seguem do Teorema Ergódico, a ser visto logo abaixo (depois de Reversibilidade).